

Nama : Mohammad Febryan Khamim

Senin, 27 November 2023

NRP : 5002221072

Soal Latihan 6.5 Bagian B

11). Diberikan PD tingkat 2 $x'' - 4x' + 3x = 0$, $x = x(t)$

a). Reduksi order PD tersebut sehingga menjadi sistem PD linear tingkat satu.

$$\begin{aligned} \text{misal : } x_1 &= x \\ x_2 &= x' = x_1' \\ x_2' &= x'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'' - 4x' + 3x &= 0 \\ x_2' - 4x_2 + 3x_1 &= 0 \\ x_2' &= 4x_2 - 3x_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b). Tentukan titik setimbangnya (equilibrium)

T misal ada persamaan:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2)$$

maka (x_{1_0}, x_{2_0}) titik setimbang jika memenuhi

$$f(x_{1_0}, x_{2_0}) = 0 \text{ dan } g(x_{1_0}, x_{2_0}) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_1 + 4x_2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{maka diperoleh } x_1 \text{ dan} \\ &x_2 \text{ yang memenuhi} \\ &\text{adalah } (0,0). \end{aligned}$$

Jadi, titik setimbang/ekuilibrium saat $(0,0)$

c). Tentukan persamaan / polinomial Karakteristiknya.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Persamaan Karakteristik} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

d). Terapkan Kriteria Routh - Hurwitz untuk menganalisa kestabilannya (stabil / tak stabil).

Persamaan Karakteristik : $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

Syarat perlu menganalisis kestabilan dengan menerapkan Kriteria Routh - Hurwitz adalah semua koefisien persamaan karakteristik harus positif dan lengkap. Karena dalam $p(\lambda)$ terdapat koefisien negatif. Maka analisis kestabilan menggunakan Kriteria Routh - Hurwitz tidak dapat dilakukan.

e). Tentukan nilai Eigen, λ_i dari sistem dan simpulkan tipe kestabilannya.

$\Rightarrow$ Persamaan Karakteristik : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
 $(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$
 $\lambda = 1 \vee \lambda = 3$

Karena real berbeda dan bertanda sama, maka tipe titik kritisnya adalah node / simpul. Dan karena akar-akarnya positif, maka tak stabil.

f). Tentukan vektor Eigen ϑ_i yang bersesuaian dengan λ_i dan Gambarkan phase portrait trayektori sistem tersebut.

$\rightarrow \lambda = 1$
 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \vartheta = 0$
 $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vartheta = 0$
 $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$
 $\vartheta_1 = \vartheta_2$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

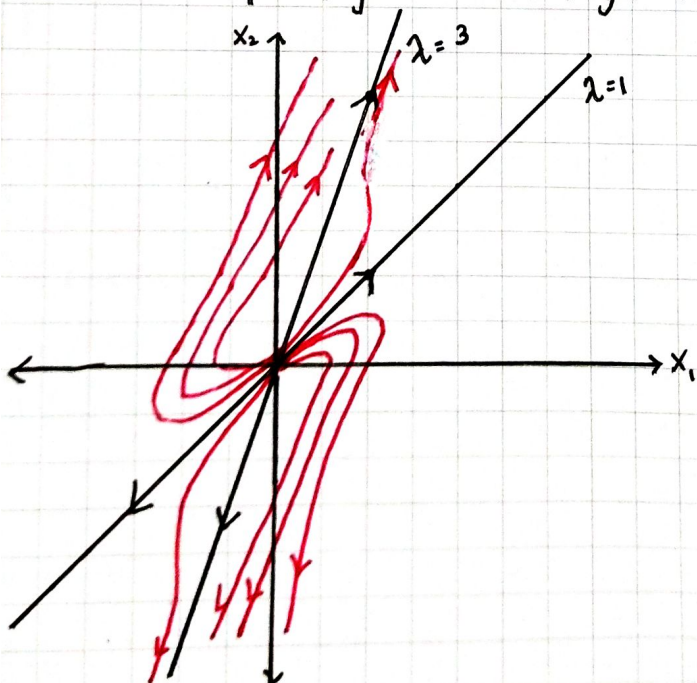
Vektor eigen : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \lambda = 3$
 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vartheta = 0$
 $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vartheta = 0$
 $3\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$
 $3\vartheta_1 = \vartheta_2$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen saat $\lambda = 3$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1) Gambar potret fase sistem trayektori :



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Saat t semakin dekat ke tak hingga, e^{3t} akan lebih cepat mendekati tak hingga dibanding e^t .

14). Diketahui sistem non-homogen : $X_1' = 2x_1 + 4x_2 + 8\sin 2t$
 $X_2' = -2x_1 - 2x_2 + 8\cos 2t$

a). Dapatkan penyelesaian umum dari sistem order satu ini yang terkait sistem homogennya!

► Bentuk Umum PD Linear non-homogen.

$$x' = Ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 8\sin 2t \\ 8\cos 2t \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)(-2-\lambda) + 8 = 0$$

$$= -4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \lambda = 2i$$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & 4 \\ -2 & -2-2i \end{pmatrix} v = 0$$

$$(1-i)b_2 + b_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2-2i \end{pmatrix} v = 0$$

$$-2v_1 + (-2-2i)v_2 = 0$$

$$(-1-i)v_2 = v_1$$

$$\text{misal : } v_2 = s$$

$$v_1 = (-1-i)s$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} s$$

$$* X_1(t) = e^{2it} \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\cos 2t + i\sin 2t) \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos 2t - i\cos 2t - i\sin 2t + \sin 2t \\ \cos 2t + i\sin 2t \end{bmatrix}$$

⇒ Pisahkan real dan imajiner

$$X(t) = C_1 \begin{bmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

b). Dapatkan matriks fundamental

$$X = \begin{bmatrix} \sin 2t - \cos 2t & -\cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix}$$

c). Dapatkan penyelesaian Partikular X_p dari sistem

$$X u' = b$$

$$\begin{bmatrix} \sin 2t - \cos 2t & -\cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \sin 2t \\ 8 \cos 2t \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sin 2t - \cos 2t & -\cos 2t - \sin 2t & 8 \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t & 8 \cos 2t \end{array} \right] \xrightarrow{B_2 + B_1} \left[\begin{array}{cc|c} \sin 2t & -\cos 2t & 8 \sin 2t + 8 \cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t & 8 \cos 2t \end{array} \right]$$

$$* (u_1') \cos 2t + (u_2') \sin 2t = 8 \cos 2t$$

$$u_1' + u_2' \tan 2t = 8$$

$$u_1' = 8 - u_2' \tan 2t \quad \text{--- (1)}$$

$$* (u_1') \sin 2t - (u_2') \cos 2t = 8 \sin 2t + 8 \cos 2t$$

$$u_1' - (u_2') \cot 2t = 8 + 8 \cot 2t$$

$$\text{dari (1), diperoleh : } 8 - (u_2') \tan 2t - (u_2') \cot 2t = 8 + 8 \cot 2t$$

$$- [u_2'] (\tan 2t + \cot 2t) = 8 + 8 \cot 2t - 8$$

$$u_2' \left[\tan 2t + \frac{1}{\tan 2t} \right] = \frac{8}{\tan 2t}$$

$$u_2' \left[\frac{\tan^2 2t + 1}{\tan 2t} \right] = \frac{8}{\tan 2t}$$

$$u_2' (\sec^2 2t) = 8$$

$$u_2' = \frac{8}{\sec^2 2t}$$

$$= 8 \cos^2 2t \quad \text{.... (2)}$$

$$\text{Dari (1) dan (2) didapat : } u_1' = 8 - u_2' \tan 2t$$

$$= 8 - 8 \cancel{\cos^2 2t} \cdot \frac{\sin 2t}{\cancel{\cos 2t}}$$

$$= 8 - 8 \sin 2t \cos 2t$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int u_1' \\
 &= \int 8 + 8 \sin 2t \cos 2t \, dt \\
 &= 8t + \int 8 \sin 2t \cos 2t \, dt \\
 &= 8t + \int 4 \sin 4t \, dt \\
 &= 8t - \cos 4t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \int u_2' \\
 &= \int 8 \cos^2 2t \\
 * \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\
 2\cos^2 \theta &= \cos 2\theta + 1 \\
 8\cos^2 \theta &= 4(\cos 2\theta + 1) \\
 u_2 &= \int 4(\cos 4t + 1) \, dt \\
 &= 4 \left[\int \cos 4t \, dt + \int dt \right] \\
 &= 4 \left[\frac{1}{4} \sin 4t + t \right] \\
 &= \sin 4t + 4t
 \end{aligned}$$

$$X_p = X_c \cdot u$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \sin 2t - \cos 2t & -\cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8t - \cos 4t \\ 4t + \sin 4t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8t \sin 2t - \sin 2t \cos 4t - 8t \cos 2t + \cos 2t \cos 4t - 4t \cos 2t - 4t \sin 2t - \cos 2t \sin 4t - \sin 2t \sin 4t \\ 8t \cos 2t - \cos 2t \cos 4t + 4t \sin 2t + \sin 2t \sin 4t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4t \sin 2t - 2t \cos 2t - \sin 2t \cos 4t - \cos 2t \cos 4t - \cos 2t \sin 4t - \sin 2t \sin 4t \\ 8t \cos 2t + \cos 2t \cos 4t + 4t \sin 2t + \sin 2t \sin 4t \end{bmatrix} \\
 &= 4t \begin{bmatrix} \sin 2t - 3\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} + \cos 4t \begin{bmatrix} -\sin 2t - \cos 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + \sin 4t \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

d). Dapatkan PU dari sistem PD non homogen tersebut

$$\begin{aligned}
 \text{PU} &: X_c + X_p \\
 &= C_1 \begin{bmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} + 4t \begin{bmatrix} \sin 2t - 3\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} + \cos 4t \begin{bmatrix} -\sin 2t - \cos 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + \sin 4t \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e). Syarat awal $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tentukan penyelesaian khususnya.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$\Rightarrow -C_1 - C_2 - 1 = 1$$

$$C_1 + C_2 = -2 \dots (1)$$

$$\Rightarrow C_1 + 1 = 1$$

$$C_1 = 0 \dots (2)$$

$$C_2 = -2 //$$

Penyelesaian Khusus :

$$\begin{aligned}
 &= -2 \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} + 4t \begin{bmatrix} \sin 2t - 3\cos 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} + \cos 4t \begin{bmatrix} -\sin 2t - \cos 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \\
 &\quad + \sin 4t \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$